RICOMINCIO DA ... *N*

UN'ESPERIENZA DI INSEGNAMENTO DELL'ALGEBRA IN UNA PRIMA LICEO CLASSICO SPERIMENTALE

Domingo Paola. Liceo classico 'G. Pascoli' (Albenga)

Gruppo Ricerca Educazione Matematica Genova. DIMA. Università di Genova

SOMMARIO. In questa nota si presenta un'esperienza di insegnamento di temi di algebra in una prima liceo classico sperimentale. Gli argomenti trattati fanno parte del tema 'L'insieme dei numeri naturali' dei programmi Brocca del triennio dell'indirizzo classico-linguistico. La proposta nasce dall'esigenza di coinvolgere maggiormente gli studenti impegnandoli in attività che riproducano, con gli inevitabili limiti e fatte le dovute proporzioni, il modo di operare del matematico quando si trova ad affrontare un problema. Si sostiene l'ipotesi che l'insieme dei numeri naturali possa essere utilizzato come ambiente ideale per favorire attività di concettualizzazione e di riflessione su proprietà particolarmente familiari allo studente; per un'introduzione all'algebra che si potrebbe definire, per certi aspetti, concreta; per indurre alla riflessione sulle nozioni di congettura, confutazione, dimostrazione. Si accenna, infine, ad alcuni comportamenti degli studenti, che sono oggetto di studio nelle ricerche del GREMG del Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova.

PREMESSA

Questa proposta nasce dal desiderio di coinvolgere maggiormente gli studenti impegnandoli in attività che riproducano, con gli inevitabili limiti e fatte le dovute proporzioni, il modo di operare del matematico quando si trova ad affrontare un problema. Durante l'attività in classe sono stati rilevati comportamenti che sono ora oggetto di indagine di ricerca didattica da parte del GREMG del Dipartimento di Matematica dell'Università di Genova. I primi risultati di quest'indagine saranno presentati ai convegni CIEAEM 47 (Berlino) e PME 19 (Recife). In questa sede cercherò di dare un'esauriente descrizione dell'attività svolta in classe, mentre mi limiterò semplicemente ad accennare all'attività di ricerca didattica appena avviata.

Nella progettazione e nella conduzione del lavoro si è cercato di prendere in considerazione le indicazioni e i suggerimenti forniti al seminario di aggiornamento 'L'insegnamento dell'algebra fra tradizione e rinnovamento' tenutosi a Viareggio dal 12 al 23 Settembre 1994, istituito con DM 20-07-1993 secondo il Protocollo d'intesa tra il MPI e l'UMI.

Il lavoro è stato impostato su tre convinzioni: la prima è che si possa soddisfare l'esigenza che ha motivato la proposta e, cioè, che si possa simulare in classe, fatte le dovute proporzioni, l'attività del matematico; la seconda è che l'elaboratore offra strumenti assai validi per la ricerca di un senso comune dell'attività matematica, ricerca che ha spesso caratterizzato l'attività didattica, come si rileva in (Furinghetti, 1994); la terza è che nell'ambito della teoria dei numeri si possano trovare molti problemi non banali, ma formulabili con estrema chiarezza. Come è scritto in (Arzarello, Bazzini & Chiappini, 1994, 84) l'insieme dei numeri naturali può essere utilizzato «come realtà di studio ricca e stimolante, in grado di favorire: processi di concettualizzazione di proprietà che risultano in qualche modo familiari all'alunno per l'esperienza che egli ha condotto in questo campo numerico; l'introduzione del calcolo letterale in un contesto d'uso motivante e controllabile nella complessità; la riflessione su alcuni concetti importanti del pensiero matematico, quale quello di congettura, di verità di una proposizione, di dimostrazione, di verifica».

Del resto i problemi della teoria dei numeri sono ritenuti essere al cuore della matematica anche da molti matematici di primo piano (Dunham, 1990; Hardy, 1989).

DESCRIZIONE DELLA PROPOSTA

Il lavoro si è svolto nell'arco di un quadrimestre in una prima classe di liceo classico sul seguente percorso:

1. Lettura di definizioni ed enunciati tratti da libri di matematica. Quest'attività non ha caratterizzato solo le prime lezioni, ma ha costituito un costante impegno per gli studenti.

2. Ricerca di formule che danno la somma dei primi numeri naturali, dei primi numeri pari, dei primi numeri dispari, dei quadrati dei primi numeri naturali ...; lo scopo era quello di rendere più familiare agli studenti il concetto di formula.

3. Esplorazione di formule che generano numeri primi: formulazione di congetture; esibizione di dimostrazioni e di controesempi. L'obiettivo era quello di rendere consapevoli gli studenti dell'opportunità di sottoporre ad attenta analisi ogni congettura prodotta.

4. Congruenze e loro proprietà. L'obiettivo era quello di rivisitare alcune conoscenze di matematica elementare, come quelle relative ai criteri di divisibilità, utilizzando le proprietà delle congruenze; si sperava, in tal modo, di motivare ulteriormente gli studenti ad accettare l'attività dimostrativa.

5. Classi di congruenza Z_n. L'obiettivo è stato quello di presentare agli studenti 'nuovi sistemi di numeri' e di impegnarli nell'esplorazione delle proprietà di cui godono le strutture $\{Z_n,+\}$, $\{Z_n,\cdot\}$ e altre strutture algebriche.

6. Cenni ai vettori e alle matrici come strutture astratte di dati. Si è accennato alle operazioni fra scalari, vettori e matrici utilizzate nel prosieguo del corso.

7. Codici crittografici. L'obiettivo è stato quello di mostrare un'applicazione significativa degli insiemi Z_n. L'approccio è quello seguito in (Childs, 1989).

Durante l'attività didattica si è fatto costante uso dell'elaboratore come assistente matematico (foglio elettronico e un manipolatore simbolico). Molte lezioni di due ore si sono svolte interamente in laboratorio di informatica, dove gli studenti lavorano in piccoli gruppi (tre per ogni elaboratore).

DESCRIZIONE DELLA CLASSE

La classe in cui le attività sono state proposte segue un corso sperimentale in un istituto che prevede anche un corso tradizionale. Gli studenti, per varie e sfortunate vicissitudini, avevano conoscenze di base in matematica praticamente inesistenti; anche per tale motivo la scelta di partire da problemi riguardanti i numeri naturali si è rivelata felice. Gli studenti, infatti, sono sembrati inizialmente rassicurati dal poter lavorare con ‘oggetti matematici’ noti fin dalla scuola elementare; inoltre, come già detto, la teoria dei numeri è un campo pressoché inesauribile di problemi significativi e al tempo stesso passibili di essere formulati in modo estremamente chiaro anche per studenti con un livello molto basso di conoscenze di base. L’elevato numero di studenti (31 di cui 23 appartenenti alla sezione A dell’istituto e 8 alla sezione B) ha costituito il problema maggiore per una corretta e utile conduzione delle attività proposte: in particolare spesso si è dovuto interrompere il lavoro di alcuni gruppi per dare suggerimenti a tutti gli altri studenti che non riuscivano nemmeno a impostare il lavoro. Altre volte l’insegnante ha dovuto avviare la fase di sistematizzazione prima che alcuni gruppi fossero giunti a un punto del lavoro che potesse renderla realmente significativa, per soddisfare le richieste di discutere, prima della fine dell’ora di lezione, le strategie adottate dagli altri gruppi. Anche il lavoro di laboratorio, soprattutto all’inizio, è stato gestito con difficoltà, non essendovi alcuno studente in grado di essere autosufficiente nell’utilizzazione dell’elaboratore.

La classe parallela che segue il corso tradizionale (composta di 29 elementi, di cui 7 appartenenti alla sezione A dell’istituto e 22 alla sezione B) ha svolto, con lo stesso insegnante, un percorso sulla teoria delle equazioni (equazioni, disequazioni e sistemi, lineari e di secondo grado o riconducibili a essi) di stampo prettamente tradizionale (anche se lo sforzo dell’insegnante è stato sempre teso a dare un senso alle formule utilizzate nel corso). Tale classe ha costituito un costante, anche se indiretto, termine di paragone, utile a saggiare, soprattutto, le differenti motivazioni degli studenti delle due classi a lavorare e, in alcuni casi, il grado di consapevolezza raggiunto nella risoluzione dei problemi e degli esercizi proposti.

QUADRO PEDAGOGICO IN CUI SI È ATTUATA LA PROPOSTA

Ritengo opportuno precisare che l’attività didattica svolta in classe e quella successiva di ricerca non si inquadrano in un unico contesto psicopedagogico: ho lavorato in alcuni momenti in una prospettiva di stampo costruttivista, (Borasi & Siegel, 1994) in altri seguendo il metodo delle domande che si evolvono (Maier, 1993) in altri casi ancora (senza dubbio la maggior parte, per quel che riguarda quest’esperienza) seguendo un’ipotesi di apprendistato cognitivo (Arzarello, 1994).

Il metodo delle domande che si evolvono è stato particolarmente utile nella conduzione e nel commento di attività in cui le mie consegne erano ben precise e individuate, così come gli scopi che si proponevano (per esempio nell’introduzione dei vettori e delle matrici come opportune strutture dati).

Un modello di attività ricalcante l'inquiry approach è stato utilizzato soprattutto nella prima fase, nella quale si partiva da problemi non ben strutturati che venivano via via precisati attraverso la riflessione sugli stessi problemi da parte degli studenti (mentre io fungevo da coordinatore della ricerca). In questi casi gli obiettivi specifici non erano ben definiti, anche se obiettivi di massima venivano sempre posti per ogni attività. Per esempio, la discussione su una forma non precisa della congettura di Goldbach, che aveva come obiettivo l'acquisizione di abilità nella lettura di un enunciato di matematica, mi ha portato a concludere che molti studenti non possedevano un concetto corretto di numero primo; l'attività seguente è stata quindi un'attività sui numeri primi, che ha portato anche alla dimostrazione della congettura (fatta dagli studenti) che i numeri primi sono infiniti. La dimostrazione, non essendo stata accettata dagli studenti, ha portato a una discussione sulle dimostrazioni per assurdo, sulla loro struttura logica.

Nell'inquiry approach «la conoscenza viene concepita come una costruzione riflessiva mediante un processo di inquiry motivato da ambiguità, anomalie e contraddizioni e condotta all'interno di una comunità di ricerca; l'apprendimento viene inteso come un processo generativo di costruzione di significato, processo che richiede sia interazione sociale che costruzione personale in situazioni motivanti; l'insegnamento viene concepito come attività creatrice di ambienti ricchi di motivazioni per l'inquiry e di condizioni capaci di sostenere una comunità di studenti» (Borasi & Siegel, 1994, 483).

Sebbene mi senta particolarmente vicino a tale posizione pedagogica, ho dovuto accantonare l'ipotesi di svolgere con tale metodo la maggior parte delle attività, sia per l'elevato numero di studenti, sia per il ridotto numero di ore settimanali di lezione (tre), sia anche perché in alcuni casi richiedevo lo studio di un sistema di regole e di codici condiviso: volevo sia che lo studente condividesse tale sistema di regole e di codici, sia abbreviare i tempi della condivisione. Per tali motivi ho spesso optato per l'apprendistato cognitivo, una «metodologia che coinvolge gli aspetti tipici della teoria costruttiva di Brousseau, ma tiene conto anche degli aspetti di supporto da parte dell'insegnante [...]. L'apprendistato tiene conto dell'apprendimento inteso anche come imitazione dell'esperto da parte del principiante, nonché del supporto che il primo può dare al secondo esternando le proprie strategie, i processi di pensiero seguiti e le difficoltà, incontrate o evitate, mentre risolve un problema. Il principiante si trova immerso in un clima di bottega d'arte del Rinascimento, in cui si apprende facendo, vedendo fare e discutendo sistematicamente quello che si fa (si è fatto) e gli aspetti cognitivi di come lo si fa, sia con esperti, sia con altri principianti» (Arzarello, 1994, 551-552).

DIFFICOLTÀ PREVISTE, STRATEGIE ADOTTATE E COMPORTAMENTI OSSERVATI

Le considerazioni riportate nei seguenti punti 1- 4 costituiscono una sorta di analisi preliminare condotta nella fase di progettazione e impostazione del lavoro:

1. probabilmente gli studenti avrebbero incontrato grosse difficoltà nella comprensione di testi matematici, anche nel caso di enunciati molto elementari;

2. probabilmente gli studenti avrebbero faticato ad accettare la logica del controesempio;

3. probabilmente si sarebbe verificata la tendenza a produrre pseudodimostrazioni basate sull'analisi di casi particolari;

4. probabilmente gli studenti si sarebbero mostrati restii a produrre congetture personali.

Per accelerare la soluzione di tali problemi, si è deciso di adottare, fin dai primi momenti del lavoro, le seguenti strategie:

a) per risolvere il problema di cui al punto 1: leggere e interpretare (insieme all'insegnante) definizioni, enunciati di teoremi o congetture della teoria dei numeri tratti da libri di testo scolastici o da manuali universitari. La scelta doveva necessariamente cadere su enunciati significativi, ma formulati in modo chiaro (per esempio la congettura di Goldbach, l'enunciato del teorema sull'infinità dei numeri primi, la definizione di numero primo, quella di massimo comune divisore e minimo comune multiplo). Un approccio di questo tipo avrebbe consentito, inoltre, di formare una base di conoscenze utile a proseguire nel lavoro. Gli studenti sono stati invitati (non obbligati) a redigere un quaderno in cui raccogliere non solo le conoscenze acquisite, ma anche eventuali riflessioni critiche sull'utilizzazione di una definizione piuttosto che un'altra o sul perché si è preferita una formulazione di un enunciato rispetto a un'altra. (Si deve sottolineare che solo un piccolo gruppo di studenti ha seguito il consiglio: la maggior parte ha ritenuto che il lavoro fosse superfluo dato che definizioni ed enunciati sarebbero stati reperibili su manuali e libro di testo).

b) Utilizzazione dell'elaboratore (nella prima fase in particolare il foglio elettronico) come strumento utile a produrre numerosi dati passibili di osservazione e quindi utile a far nascere congetture. L'attività all'elaboratore avrebbe dovuto contribuire a risolvere i problemi 2 e 4 (anche se in pratica si sono verificati passi significativi solo in direzione dell'attività 4, mentre la logica del controesempio è tuttora vista con sospetto dalla maggior parte degli studenti della classe); d'altra parte tale attività avrebbe potuto creare ulteriori problemi per quel che riguarda il punto 3.

Infatti ho notato che se l'elaboratore favorisce la produzione di congetture sembra inibire il controllo delle stesse. Molti studenti sono portati a giustificare affermazioni di carattere universale basandosi su un insieme non esaustivo di esempi prodotti dal calcolatore. Sembra inoltre che l'attività di ricerca di controesempi non sia particolarmente stimolata dall'utilizzazione dell'elaboratore: intendo dire che spesso gli studenti, avendo a disposizione strumenti di calcolo molto potenti, rinunciano una ricerca intelligente del controesempio (una ricerca volta a individuare casi critici per la congettura) e si limitano a una ricerca casuale o volta a considerare sequenzialmente tutti i possibili esempi. Il grado di fiducia in una congettura è costruito esclusivamente sulla numerosità dei casi che verificano la congettura. A tal proposito rilevo che, nonostante la potenza del mezzo, la maggior parte degli studenti si limita alla verifica diretta di una decina di casi e poi conclude che è inutile guardare gli altri casi, poiché la congettura è sufficientemente verificata ... Eulero docet (Anonimo, 1988).

Questi comportamenti possono essere controproducenti per un percorso didattico che non voglia perdere di vista alcune abilità che, a mio avviso, continuano a caratterizzare profondamente l'attività matematica, come quella dimostrativa. Con questo, ovviamente, non rinuncio a sottolineare le grandi potenzialità degli strumenti di calcolo automatici, ma voglio mettere in guardia contro l'uso indiscriminato e non controllato degli stessi. Per esempio, ho rilevato comportamenti (anche se non sempre estesi e persistenti) di studenti che davanti al video sembrano comportarsi come in un sogno, in cui le facoltà razionali sono assopite: la loro capacità di analisi critica viene inibita. Essi accettano quasi tutto quello che compare sul video, senza sottoporlo ad analisi. Si nota anche un modo di lavorare più frammentario: la strategia è intrapresa anche quando il piano di lavoro non è stato elaborato, come quando si scrive con un word processor e si inizia a comporre anche se il pensiero non è compiuto.

Per costringere gli studenti a non utilizzare solo ed esclusivamente l'elaboratore, ma per convincerli dell'opportunità e della necessità (in certi casi) di produrre dimostrazioni, ho posto problemi sempre più generali. Per esempio, dopo che alcuni studenti hanno dimostrato che le formule $n^2 - n + 41$ e $n^2 - 79n + 1601$ non generano solo numeri primi, ho chiesto se esiste una formula del tipo $n^2 - n + c$ che genera solo numeri primi; in seguito se può esistere una formula del tipo $an^2 + bn + c$ che genera solo numeri primi; e infine se può esistere una formula polinomiale che genera solo numeri primi. Le risposte ai problemi generali sono state del tipo «senz'altro, poiché queste formule sono infinite, qualcuna fra esse genererà solo numeri primi». Gli studenti non sono andati al di là di giustificazioni di questo tipo né hanno sentito il bisogno di tentare di dimostrare la loro asserzione (o, almeno, di sottoporla a verifica su casi particolari). La risposta negativa data dall'insegnante, con la relativa dimostrazione non li ha convinti più di tanto, probabilmente per la difficoltà propria dei ragazzi a mettere in formula e a gestire le formule e i loro significati (Arzarello, 1994).

Le attività di esplorazione delle proprietà delle strutture $\{Z_n,+\}$ e $\{Z_n,\cdot\}$, condotte con l'ausilio di un manipolatore simbolico, sono quelle che hanno coinvolto maggiormente gli studenti, forse anche per il fatto che, in tal caso, per ogni n fissato, era consentita un'analisi esaustiva dei casi possibili. Per esempio, molti studenti hanno scoperto che un elemento di $\{Z_n,\cdot\}$ ammette inverso quando è primo con n. Altri studenti hanno creduto di poter derivare, da questa proprietà, che se n è pari, allora tutti gli elementi dispari di $\{Z_n,\cdot\}$ ammettono inverso. Altri studenti hanno confutato quest'ultima congettura esibendo controesempi. Si è quindi instaurato un flusso di informazioni nell'usuale attività didattica che ha reso vivaci e stimolanti le sessioni di lavoro e che ha visto l'insegnante impegnato spesso nell'attività di dirigere il traffico di informazioni.

In definitiva si può dire che il linguaggio algebrico è stato funzionale alla convalida delle congetture, mentre il software utilizzato è stato funzionale alla produzione di congetture, anche se gli studenti hanno dimostrato maggiore interesse per la fase di produzione di congetture che non per la fase di validazione o confutazione delle stesse.

Altri comportamenti osservati durante le fasi di lavoro di gruppo sono stati:

1. difficoltà, da parte degli studenti, a recuperare un senso nei simboli e nelle formule utilizzate: per esempio, quando si è definito l'inverso di un elemento, molti studenti dicevano che in $\{Z_{26},\cdot\}$ l'inverso di 5 è il numero 1/5, senza pensare che 1/5 non è un elemento di $\{Z_{26},\cdot\}$.

2. Collegata alla difficoltà di recuperare un senso delle espressioni algebriche, è la tendenza a liberare la 'bestia del calcolo' senza la capacità di controllo su di essa: gli allievi, in altri termini, tendono a privilegiare gli aspetti procedurali e non provvedono al loro controllo, pertanto perdono completamente il senso di ciò che stanno facendo e non riescono a recuperarlo. Per esempio, quando si è richiesta l'inversa di una matrice A a elementi in $\{Z_{26}\}$, molti studenti hanno calcolato l'inversa con Derive e, quando hanno ottenuto come risultato una matrice

avente per elementi frazioni, non si sono minimamente preoccupati del vincolo imposto agli elementi delle matrici considerate; hanno continuato a operare su quelle matrici meccanicamente. In tal caso l'utilizzazione dell'elaboratore ha probabilmente acuito la tendenza a non controllare la 'bestia del calcolo'. Ho notato da parte degli studenti, «atteggiamenti formali ignari» piuttosto che «atteggiamenti formali sofisticati» (UMI, 1977, 145).

3. Rigidità nella individuazione del contesto: per esempio, dopo aver svolto un lavoro sui codici crittografici che fanno uso di proprietà degli insiemi $\{Z_n\}$, gli studenti continuavano a rimanere in quel contesto, anche in problemi che richiedevano di lavorare con i numeri naturali e non con le classi di resti.

4. Tendenza a generalizzare ad altre strutture proprietà valide nei numeri reali. Per esempio, la legge di annullamento del prodotto veniva considerata valida (a priori) in ogni struttura algebrica; oppure si riteneva che l'unico elemento che potesse essere inverso di se stesso rispetto alla moltiplicazione fosse l'elemento neutro. Quest'ultimo fatto è stato rilevato e discusso anche in (Hazzan, 1994).

Più in particolare, sul problema «trovare una formula che esprima la somma dei primi n numeri naturali non nulli» ecco le difficoltà riscontrate dagli studenti:

a) non comprensione dell'enunciato del problema anche su casi particolari, come per esempio quello riguardante la somma dei primi tre numeri naturali: due dei dieci gruppi di lavoro addizionavano un numero imprecisato di numeri primi; in tre gruppi non si è riusciti a produrre alcun esempio se non con l'aiuto dell'insegnante; due gruppi hanno scritto $1 + 3 + 5 = 9$.

b) Non comprensione di che cosa si intende per la somma dei primi n numeri naturali. Alcune affermazioni o domande ricorrenti degli studenti: «n può essere infinito, quindi la somma è infinita»; «che cos'è n?»; «come posso calcolare la somma se non so che cos'è n?».

Sono emerse anche alcune idee interessanti; per esempio un gruppo ha trovato la formula ricorsiva $S_n = S_{n-1} + n$, mentre un altro ha trovato la formula $S_n = n(n+1)/2$ partendo dall'ipotesi che la somma fosse un polinomio di secondo grado. Ciò ha consentito, in fase di sistematizzazione, di accennare a un confronto tra formule ricorsive e iterative.

Comportamenti interessanti per attività di ricerca didattica sono stati rilevati durante un'esercitazione di gruppo sulle congruenze lineari. Gli studenti dovevano risolvere due congruenze lineari ($22x \equiv 19 \pmod{17}$ e $24x \equiv 18 \pmod{17}$ e dovevano spiegare perché $2/3 \equiv 7 \pmod{11}$. L'esercizio richiedeva (preliminarmente) di leggere un brano di teoria dei numeri adattato da (Davenport, 1994, 41-42; Childs, 1989, 98-99), in cui si riportava il teorema di Fermat per trovare l'inverso di un elemento non zero di Z_p con p primo, la sua dimostrazione e un corollario utile per risolvere gli esercizi proposti. Gli studenti non hanno utilizzato, per risolvere gli esercizi proposti, il teorema e il corollario presenti nel testo; può darsi che ciò sia dipeso dall'effetto oscurante della dimostrazione, ma penso che non sia da escludere anche un'altra ipotesi e cioè che essi abbiano pensato all'enunciato di un teorema come a un punto di arrivo e non come a un possibile punto di partenza per ottenere altri risultati. In altri termini, il teorema è visto come costruzione finita e non come strumento per nuove costruzioni e ha quindi senso solo se si è compresa la dimostrazione.

In alcuni gruppi di studenti ho però riscontrato miglioramenti in itinere assai significativi per quanto riguarda l'uso sintatticamente corretto del linguaggio algebrico e di quello specifico del software utilizzato. Penso di poter azzardare che all'origine di tale progressi vi sia l'esigenza di comunicare con il calcolatore per poterlo utilizzare come fa l'insegnante. Per questi studenti, mentre la matematica è qualcosa che appartiene al mondo dell'insegnante, il calcolatore fa parte (o deve entrare a far parte) del proprio mondo. Vi è allora una differente disposizione ad apprendere che, se ben gestita, può aiutare a conseguire miglioramenti significativi nell'apprendimento.

DESCRIZIONE DI UNA ESPERIENZA COME ESEMPIO DEL LAVORO SVOLTO

- *Esperienza*: una formula che genera numeri primi.
- *Collocazione temporale*: sesta lezione (2 - 3 ore)
- *Obiettivo guida*: uso dell'elaboratore per produrre, verificare o confutare congetture.
- *Obiettivi operativi*: addestramento all'uso di un foglio elettronico (già parzialmente conseguito nelle precedenti lezioni).
- *Metodologia adottata*: lavoro in aula informatica a gruppi di due o tre alunni. I ragazzi possono utilizzare qualunque strumento. L'insegnante si pone in qualità di consigliere, avviando discussioni all'interno dei singoli gruppi; pone domande che dovrebbero indurre a riflessione e a domande poste dagli allievi risponde in genere con altre domande tese a precisare il pensiero degli studenti e a condurlo verso gli obiettivi cognitivi prefissati. In alcuni casi l'insegnante si pone in qualità di coordinatore della ricerca, suggerendo strategie, ricorrendo a controesempi mirati se gli studenti hanno intrapreso una strada che porta verso l'insuccesso. L'atteggiamento dell'insegnante non è mai, però, prescrittivo né autoritario: cerca di dialogare con i gruppi di studenti e di responsabilizzarli sulla strategia da adottare. L'insegnante cerca inoltre di favorire la libertà di espressione e utilizza l'eventuale errore dello studente come punto di partenza per la successiva attività di sistematizzazione e commento alle attività dei gruppi.
- *Campo concettuale*: concetto di formula; numero primo; concetto di funzione.
- *Proposta di lavoro*: «Dite se la formula $n^2 - n + 41$ genera:

a) tutti i numeri primi

b) solo (ma non tutti i) numeri primi

c) anche alcuni numeri non primi. Giustificate esaurientemente ogni risposta fornita. Potete utilizzare il libro di testo, materiale cartaceo e il foglio elettronico».

- *Analisi a priori dei comportamenti attesi*: la maggior parte degli studenti affermerà che la formula genera solo numeri primi, ma non tutti i numeri primi, giustificando tale fatto con l'esibizione di alcuni esempi particolari. Si attende con curiosità di vedere se l'utilizzazione di un potente strumento di calcolo consentirà l'individuazione di controesempi e quindi guiderà qualche studente verso la risposta corretta.

- *Comportamenti osservati*: gli studenti provano a mano, o con il calcolatore, per quattro o cinque numeri: funziona sempre. Quasi tutti sono convinti che la formula generi solo numeri primi (solo quelli maggiori di 41: in genere gli studenti ritengono che verranno generati tutti i numeri primi maggiori di 41). Vi sono solo due studenti che si accorgono dell'esistenza di un controesempio: per $n = 41$. Ecco come ci sono arrivati. Il primo studente dice: «Ho scelto 41 perché l'ho visto scritto nella formula e poiché è logico che se moltiplichi un numero per se stesso e poi sottrai e addizioni lo stesso numero, il numero non cambia e quindi è multiplo di 41. La congettura non vale per 41 e per i multipli di 41». Il secondo studente dice: «Ho pensato a 41, perché secondo me l'inventore della formula ha provato tutti i numeri da 1 a 40, ha visto che sostituiti alla *n* generavano sempre numeri primi e non ha pensato che il 41° numero non funzionasse».

Ulteriori congetture sono state prodotte da altri studenti («né 41 né i suoi multipli, né 42 né i suoi multipli generano numeri primi»; «i numeri generati finiscono o per 1 o per 3 o per 7»...), alcune di esse sono state smentite da controesempi, altre dimostrate, altre né dimostrate né confutate.

CONCLUSIONI

Come ho detto in apertura, l'attività di ricerca didattica che si intende costruire sull'esperienza qui descritta è stata appena avviata. Non è quindi possibile trarre significative conclusioni dall'esperienza stessa. È però possibile affermare che gli studenti si sono impegnati seriamente e con entusiasmo alle attività proposte e, nonostante gli errori persistenti e i comportamenti tipici della 'patologia matematica', ho rilevato progressi significativi in un numero rilevante di studenti. Nella classe del corso tradizionale, fortemente omogenea a quella sperimentale, non ho osservato, almeno fino ad ora, analoghi risultati positivi. Penso che si possa affermare che un pregio delle attività proposte nella classe sperimentale sia stato quello di avere stimolato in differenti modi i recettori degli studenti: l'attività di apprendimento richiede una continua variazione degli stimoli, per prevenire la naturale assuefazione. Nel corso sperimentale ho alternato continuamente strumenti didattici come il lavoro di gruppo, quello individuale, letture da libri di testo, utilizzazione di differenti tipi di linguaggio di programmazione, lezioni frontali e lezioni tra gruppi, lavori autonomi di ricerca e fasi di apprendistato cognitivo.

Termino segnalando un aspetto che ritengo di importanza non secondaria: le attività sono state considerate da alcuni studenti concrete, soprattutto dopo le esercitazioni sui codici crittografici.

BIBLIOGRAFIA

Anonimo: 1988, 'Teorema di Eulero, 1752', in *Notizie di logica*, a.VII, n.3, 30.
Arzarello, F.: 1994, 'L'apprendistato dei simboli in algebra', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate,* v.17A/B, 536-554.

Arzarello, F., Bazzini, L. & Chiappini, G.: 1994, *L'algebra come strumento di pensiero: analisi teorica e considerazioni didattiche*, Quaderno TID - CNR, s. IDM, n.6.

Borasi, R. & Siegel, M.: 1994, 'Un primo passo verso la caratterizzazione di un «inquiry approach» per la didattica della matematica', *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*, v.17A/B, 467-493.

Childs, L.: 1989, *Algebra. Un'introduzione concreta*, edizione italiana a cura di Carlo Traverso, ETS Editrice, Pisa; trad. it. di *A concrete introduction to higher algebra*, Springer-Verlag, New York, 1979.

Davenport, H.: 1994, *Aritmetica superiore. Un'introduzione alla teoria dei numeri*, Zanichelli, Bologna; trad. it. di *The higher arithmetic. An introduction to the theory of numbers*, Cambridge University Press, New York, 1982.

Dunham, W.: 1992, *Viaggio attraverso il genio*, Zanichelli, Bologna; trad. it. di *Journey through genius*, John Wiley & Sons, New York, 1990.

Furinghetti, F.: 1994, 'Una storia infinita: la ricerca di 'un senso comune' nell'insegnamento della matematica', in B. D'Amore (editor), *L'apprendimento della matematica: dalla ricerca teorica alla pratica didattica*, 37-45.

Hardy, G. H.: 1989, *Apologia di un matematico*, Garzanti, Milano; trad. it. di *A mathematician's apology*, Cambridge University Press, Cambridge, 1969.

Hazzan, O.: 1994, 'A student's belief about the solutions of the equation $x = x^{-1}$ in a group', in J. P. Ponte & J. F. Matos (editors), *Proceedings of PME XVIII* (Lisboa), v.III, 49-56.

Maier, H.: 1993, 'Domande che si evolvono durante le lezioni di matematica', *La matematica e la sua didattica*, n. 2, 175-191.

UMI (editor): 1977, *Guida al progetto d'insegnamento della matematica proposto da G. Prodi*, v.1, D'Anna, Firenze-Messina.